

分数阶 Fourier 域的采样及分辨率分析*

邓 兵^{1,2**} 陶 然¹ 杨 曦¹

1. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081;

2. 海军航空工程学院电子信息工程系, 烟台 264001

摘要 分数阶 Fourier 变换是一种统一的时频变换工具, 由于其具有的一个自由参量, 能够为信号分析提供更多的选择. 文中首先对分数阶 Fourier 域采样理论作了简单回顾, 给出了更为简洁易懂的推导, 在此基础上依据分数阶 Fourier 变换与 Wigner 分布的关系, 推导了离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和分辨率. 最后以 chirp 信号为例作了仿真说明, 得到了一些有用的结论.

关键词 分数阶 Fourier 变换 采样 分辨率

1980 年 Namias 从特征值和特征函数的角度提出了分数阶 Fourier 变换 (fractional Fourier transform, FRFT) 的概念^[1], 用于微分方程求解. 其后, McBride 等用积分形式为分数阶 Fourier 变换作出了更为严格的数学定义^[2]. 但是直到 1993 年 Almeida 指出分数阶 Fourier 变换可以理解为时频平面的旋转^[3], 1996 年 Ozaktas 等提出了一种计算量与 FFT 相当的离散算法后^[4], 分数阶 Fourier 变换才真正吸引了信号处理领域科研人员的注意, 其在信号处理中的潜力也不断得到挖掘^[5-11]. 分数阶 Fourier 变换是传统 Fourier 变换的广义形式, 分数阶 Fourier 域同时包含着时域和频域信息 (时域、频域是分数阶 Fourier 域的特例. Xia 证明了不存在同时在两个不同阶数 α, β 的分数阶 Fourier 域都保持有限支撑的信号 ($\beta \neq \pm \alpha + n\pi$, n 为整数)^[12]. 根据 Xia 的结论我们可以知道在某些条件下 Shannon 采样定理未必是高效的. 例如: 在适当的分数阶 Fourier 域, 宽带线性调频信号将高度聚集, 而 Shannon 采样定理仍是以频域带宽来确定采样频率. 因此, 人们会问: 这样确定的采样频率是否合适? 随着对分数阶 Fourier 变换理论的进一步深入研究, 关于分数阶 Fourier 域的采样定理至今已有

多篇文献从不同角度进行了阐述^[13-15]. 但是遗憾的是, 这些成果并没有清晰地描绘出其全貌, 反映在如下两点: (1) 对分数阶 Fourier 域采样理论的推导不太利于理解和运用, 且偏于数学公式, 没有配合仿真来给出相应的解释; (2) 仅仅停留在公式表达层面, 而没有对分数阶 Fourier 域采样理论运用于实际情况而可能遇到的问题作出解答, 也就不利于指导实际工程中的信号处理问题. 因此, 本文的目的是解决数字信号处理的实际应用问题, 帮助读者从抽象的理论中建立起对分数阶 Fourier 变换更为直观的印象.

1 分数阶 Fourier 变换

分数阶 Fourier 变换定义如下^[3]

$$S_{\alpha}(u) = F_{\alpha}[s](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) K_{\alpha}(t, u) dt \quad (1)$$

其中 α 为变换阶数, $K_{\alpha}(t, u)$ 为变换核.

$$K_{\alpha}(t, u) = \begin{cases} \sqrt{(1 - j \cot \alpha) / 2\pi} e^{j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - j u t \csc \alpha} & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u) & \alpha = 2n\pi, n \text{ 为整数} \\ \delta(t + u) & \alpha = 2n\pi \pm \pi \end{cases} \quad (2)$$

2006-02-21 收稿, 2006-10-30 收修稿

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号: 60232010, 60572094)

** E-mail: navy_dbing@tom.com

从对信号的时频表示来看, 分数阶 Fourier 变换是对时频平面的旋转^[16]. 也就是说, 信号 s 的 α 阶分数阶 Fourier 谱密度等于角度 α 的 Radon-Wigner 变换 (如图 1 所示). 因此, 只有信号的 Wigner 分布为圆形支撑且关于圆心对称, 才能保证各阶分数阶 Fourier 谱支撑区宽度是相等的, 否则必然存在某阶分数阶 Fourier 域能够实现对信号的更好聚集. 如果只考虑低通采样情况, 那么信号的 Wigner 分布还需要进一步关于原点对称, 才能保证传统的 Shannon 采样定理对各阶分数阶 Fourier 域都是最合适的, 否则当实现对信号最佳聚集的分数阶 Fourier 域不是频域 ($\alpha = \pi/2$) 时, 那么以低于 Nyquist 采样率来采样而不造成信号失真就存在可能了.

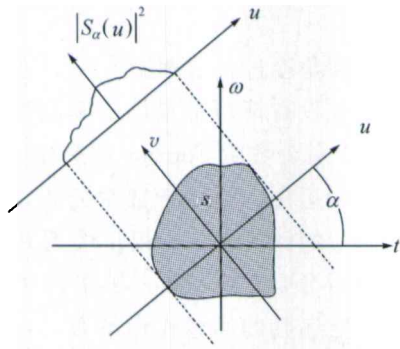


图 1 信号 s 的分数阶 Fourier 变换与 Radon-Wigner 变换的关系

既然分数阶 Fourier 变换以 2π 为周期, 不妨将 α 取值区间设为 $[-\pi, \pi]$. 本文不考虑 $\alpha = 0, \pi, -\pi$ 的特殊情况, 从分析信号的分数阶 Fourier 谱是否混叠的角度, 不失一般性, 可以假定变换阶数 $\alpha \in (0, \pi)$, 即: $\sin\alpha > 0$.

2 采样定理

本节将从连续信号与采样冲激串的乘积形式出发, 得到采样信号的分数阶 Fourier 谱表达式, 再通过分数阶 Fourier 域的低通滤波来恢复原信号, 得到重构公式, 两者便构成了完整的分数阶 Fourier 域带限信号的低通采样定理.

设理想采样信号为

$$x_s(t) = x(t)p_b(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (3)$$

式中 $\delta(t)$ 表示单位冲激. 利用分数阶 Fourier 变换卷积定理^[17]可以得到

$$X_{s,\alpha}(u) = F_\alpha[x_s](u) = F_\alpha[xp_b](u) = \frac{\csc\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\csc\alpha}{2}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(v) e^{-j\frac{\csc\alpha}{2}v^2} F_{\pi/2}[p_b] \cdot ((u-v)\csc\alpha) dv \quad (4)$$

将 $F_{\pi/2}[p_b](\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T_s})$ 代入上式, 得到

$$X_{s,\alpha}(u) = \frac{\csc\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\csc\alpha}{2}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(v) e^{-j\frac{\csc\alpha}{2}v^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \cdot ((u-v)\csc\alpha - n\frac{2\pi}{T_s}) dv = \frac{\csc\alpha}{T_s} e^{j\frac{\csc\alpha}{2}u^2} \left[X_\alpha(u) e^{-j\frac{\csc\alpha}{2}u^2} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u \csc\alpha - n\frac{2\pi}{T_s}) \right] \quad (5)$$

因为 $x(t) * \delta(at - b) = \frac{1}{a} (x(t) * \delta(t - \frac{b}{a}))$, 所以 (5) 式可以写成

$$X_{s,\alpha}(u) = \frac{1}{T_s} e^{j\frac{\csc\alpha}{2}u^2} \cdot \left[X_\alpha(u) e^{-j\frac{\csc\alpha}{2}u^2} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - n\frac{2\pi\sin\alpha}{T_s}) \right] \quad (6)$$

从 (6) 式可以发现, 采样后, 信号 $x(t)$ 的 α 阶分数阶 Fourier 变换 $X_\alpha(u)$ 以周期 $\frac{2\pi\sin\alpha}{T_s}$ 延拓, 且伴随着与谐波阶次 n 有关的线性相位调制. 如果信号 $x(t)$ 是 α 阶分数阶 Fourier 域上的带限信号, 即: $\exists \Omega_h > 0$ 使得

$$X_\alpha(u) = 0, \quad \text{当 } |u| > \Omega_h \quad (7)$$

那么当 $\frac{2\pi\sin\alpha}{T_s} \geq 2\Omega_h$ (即: 采样频率 $\omega_s \geq \frac{2\Omega_h}{\sin\alpha}$) 时就不会发生混叠. 这样便能够设计合适的分数阶 Fourier 域理想低通滤波器 (传递函数如 (8) 式所示) 来取出零次谐波, 从而不失真地恢复出原信号 $x(t)$.

$$H_\alpha(u) = \begin{cases} T_s, & |u| < \Omega_{\text{cut}} \\ 0, & |u| \geq \Omega_{\text{cut}} \end{cases}, \Omega_h \leq \Omega_{\text{cut}} \leq \omega_s \sin \alpha - \Omega_h \quad (8)$$

利用前述的基于分数阶 Fourier 变换的时域卷积定理, 我们可以得到通过上述理想低通滤波器后的信号时域重构公式. 首先令 $G_\alpha(u) = H_\alpha(u)e^{j\frac{\omega_s}{2}u^2}$, 则

$$g(t) = F_{-\alpha}[G_\alpha](t) = \sqrt{(1 + j\cot\alpha)/2\pi} \frac{2T_s \sin(\Omega_{\text{cut}} t \csc\alpha)}{t \csc\alpha} e^{-j\frac{\omega_s}{2}t^2} \quad (9)$$

所以重构信号为

$$x_r(t) = \sqrt{(1 - j\cot\alpha)/2\pi} \cdot [(x_s(t)e^{j\frac{\omega_s}{2}t^2}) * (g(t)e^{j\frac{\omega_s}{2}t^2})] e^{-j\frac{\omega_s}{2}t^2} = e^{-j\frac{\omega_s}{2}t^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_s(nT_s) e^{j\frac{\omega_s}{2}(nT_s)^2} \frac{T_s \sin[\Omega_{\text{cut}}(t - nT_s) \csc\alpha]}{\pi(t - nT_s)} \quad (10)$$

既然 Fourier 变换是分数阶 Fourier 变换当 $\alpha = \pi/2$ 时的特例, 那么当 $\alpha = \pi/2$ 时上述采样定理应该蜕化成传统 Shannon 采样定理, 显然, 这个条件是满足的.

3 相关讨论

接下来本文将讨论离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和分辨率问题. 我们都知道, 当以采样频率 f_s 对连续信号 $x(t)$ 进行采样, 采样时间为 $[-T_d/2, T_d/2]$, 即采样持续时间为 T_d , 样本数是 $N = T_d f_s$, 则采样信号 $x_s(t)$ 是时域区间 $[-T_d/2, T_d/2]$ 以间隔 $1/f_s$ 的 N 点均匀离散, 其相应的离散 Fourier 变换 $X_{s,\pi/2}(\omega)$ 是频域区间 $[-f_s/2, f_s/2]$ 以间隔 $1/T_d$ 的 N 点均匀离散. 既然 $X_{s,\pi/2}(\omega)$ 是 $X_{s,\alpha}(u)$ 的一个特例, 那么不难想到 $X_{s,\alpha}(u)$ 应该也是将 α 阶分数阶 Fourier 域的某段区间 $[u_l, u_h]$ 作了 N 点均匀离散. 因此, 只要确定了该段区间, 也就得到了相应的 α 阶分数阶 Fourier 域的分析范围和离散分辨率.

既然零阶分数阶 Fourier 域表征时域, $\pi/2$ 阶分数阶 Fourier 域表征频域, α 阶分数阶 Fourier 谱密度等于角度 α 的 Radon-Wigner 变换, 那么随着

变换阶数 α 从 0 变化到 2π , 分数阶 Fourier 变换扫过整个时频面, 并给出相应角度的一维表征. 因此, 我们得到了如图 2 所示的分数阶 Fourier 域示意图. 下面分 $f_s = T_d$, $f_s \neq T_d$ 两种情况进行分析.

首先假设 $f_s = T_d$, 则该信号的时频分布大都局限在如图 2(a) 所示的圆内. 这时, 在时频面上作任何角度的 Radon 变换的分析范围和分辨率都将是一样的, 既然 Radon-Wigner 变换与分数阶 Fourier 变换存在如图 1 所示的关系, 那么显然 α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围就是 $[-u_N, u_N] = [-f_s/2, f_s/2] = [-T_d/2, T_d/2]$, 离散分辨率是 $\Delta = 1/f_s = 1/T_d$.

接下来考虑 $f_s \neq T_d$ 的情况, 这时无法直接得到 α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和离散分辨率. 但是, 可以看到, 通过量纲归一化处理将时域 t 和频域 f 分别转换成无量纲的域 $t/\lambda, f\lambda$, 其中 $\lambda = \sqrt{T_d/f_s}$, 可以使得归一化以后信号的时频分布限定在以原点为中心直径 $\rho = \sqrt{T_d f_s}$ 的圆内^[18], 这便回到了图 2(a) 所示的情况, 只是坐标轴的含义发生了变化. 于是, 利用上述结果可以得到: 归一化以后信号的 α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围是 $[-u_N, u_N] = [-\rho/2, \rho/2]$, 离散分辨率是 $1/\rho$. 既然在无量纲域 $t/\lambda, f\lambda$ 所张成的平面中 u_N 的坐标为

$$\left(\frac{\rho}{2} \cos\alpha, \frac{\rho}{2} \sin\alpha\right),$$

那么在时频面 u_N 的坐标为 $\left(\frac{\rho}{2} \cos\alpha \lambda, \frac{\rho}{2} \sin\alpha / \lambda\right)$, 即:

$$\left(\frac{T_d}{2} \cos\alpha, \frac{f_s}{2} \sin\alpha\right),$$

所以, 相应的 α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围是

$$\left(-\sqrt{\frac{T_d^2}{4} \cos^2 \alpha + \frac{f_s^2}{4} \sin^2 \alpha}, \sqrt{\frac{T_d^2}{4} \cos^2 \alpha + \frac{f_s^2}{4} \sin^2 \alpha}\right) \quad (11)$$

离散分辨率是

$$\Delta = 2u_N/N = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{f_s^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{T_d^2}} \quad (12)$$

可见, 当 $f_s \neq T_d$ 时, α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围随着 α 的改变而形成椭圆, 图 2(b)

表示的是 $f_s > T_d$ 情况。当 $f_s < T_d$ 时，得到的结果类似于图 2(b)，只是椭圆的长短轴发生了改变，因此，本文不再另作 $f_s < T_d$ 的表示图。

需要说明的是：

(1) 尽管(11)，(12)式是推导的 $f_s \neq T_d$ 情况下 α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和分辨率表达式，但是，我们可以看到如果取 $f_s = T_d$ ，则得到了 $f_s = T_d$ 情况下的 α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和分辨率表达式，所以可以用(11)，(12)式来统一表示 α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和分辨率；

(2) 上述 α 阶离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和分辨率均是用频率 f_s 和时间 T_d 来计算的，而(6)，(10)式所描述的分数阶 Fourier 域采样定理是建立在角频率 $\omega_s = 2\pi f_s$ 上的，在作数值计算时需要注意这一点；

(3) 分数阶 Fourier 变换可以分解为两次 chirp 调制和一次尺度 $1/\csc\alpha = \sin\alpha$ 变化的 Fourier 变换^[3]，由此可以得到频域到 α 阶分数阶 Fourier 域的关系，从图 2(a)来看，就是 f 轴到 u 轴的关系，即： f 轴上的点对应为了做了尺度 $\sin\alpha$ 变化的 u 轴上的点。这里需要指出：在时频面上， f 轴上的点指的是零时刻的瞬时频率。我们不难想到利用这一点可以基于分数阶 Fourier 变换来估计 chirp 信号零时刻的瞬时频率，即：初始频率(实际上由于时间不存在负值，而分数阶 Fourier 变换离散算法总是假定信号从 $-T_d/2$ 时刻到 $T_d/2$ 时刻采样^[4]，因此估计出的零时刻“初始频率”其实是信号的中心频率)。

(4) 在利用分数阶 Fourier 变换快速离散算法进行离散计算时，都认为输入信号已经作了量纲归一化处理^[4]，当 $f_s = T_d$ 时(如图 2(a)所示)，可以认为是特殊的量纲归一化，处理前后的信号时频表征不变，而 $f_s \neq T_d$ 时，则造成了量纲归一化前后信号的时频表征发生了改变。因此，在基于该分数阶 Fourier 变换离散快速算法进行 chirp 信号参数估计时便需要对所得到的初始结果进行修正，具体修正方法可参看文献[18]。但是，直接利用本章所导出的分数阶 Fourier 域离散分辨率来计算 u 值并用于 chirp 信号参数估计，则不再需要进行修正。

(5) 尽管离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和分辨率是在采样信号满足 Shannon 采样定理的前提下导出的，但是并不一定要求必须满足 Shannon 采样定理，第 4 节通过对 chirp 信号的分析 and 仿真对此给与了验证。

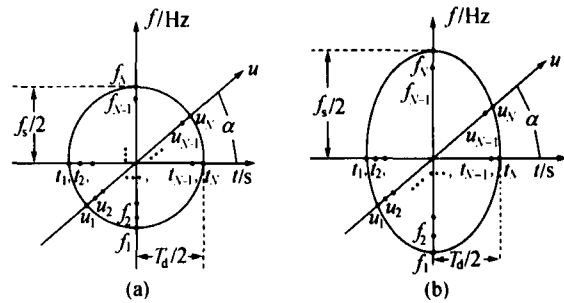


图 2 离散分数阶 Fourier 域示意图

(a) $f_s = T_d$; (b) $f_s > T_d$

4 仿真

在得出了离散分数阶 Fourier 变换的分析范围和分辨率之后，我们接下来将以 chirp 信号为例说明如何利用上述采样定理。chirp 类信号是信号处理领域的常见信号之一，不管是在自然界的天然信号中，还是人为产生的信号中，都大量存在，而且，chirp 类信号可以看成是频率时变信号的一阶近似，因此，对 chirp 类信号的分析和处理一直是信号处理领域的研究热点之一^[19]。考虑到分数阶 Fourier 变换离散算法的需要，我们仍然以图 2(a)所示的分数阶 Fourier 域来分析。设某复 chirp 信号 x 的 Wigner 分布如图 3 所示(图中的粗实线表示复 chirp 信号 x 的时频能量分布)，不失一般性，可以认为其 Wigner 分布关于原点对称(如果实际分布不关于原点对称，总是能够通过时移和频移来使其满足原点对称性)。那么按照传统采样定理其采样频率不得小于 $2f_h$ (f_h 为信号的频域最高频率)，而按照分数阶 Fourier 域采样定理其采样频率不得小于 $2u_h/\sin\alpha$ ，当然对采样信号作低通滤波恢复原信号时所用的低通滤波传递函数则须分别在频域和 α 阶分数阶 Fourier 域设计。图 3 中之所以采用了两个不同阶数 α_1 ， α_2 的分数阶 Fourier 域只是为了涵盖与信号 x 的 Wigner 分布成两种不同夹角的情况。

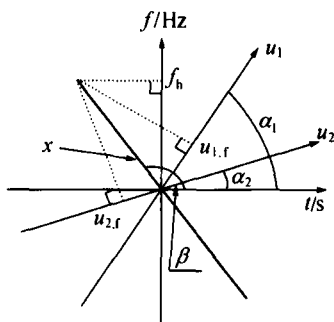


图3 信号 x 的分数阶 Fourier 域采样示意图

α_1, α_2 为分数阶 Fourier 变换的阶数, β 为信号 Wigner 分布与时间轴的逆时针夹角, $u_{1,t}$ 和 $u_{2,t}$ 分别是信号 Wigner 分布的上端点到 u_1 轴和 u_2 轴的投影

现在来看看当利用分数阶 Fourier 域采样定理时是否能够以低于 $2f_h$ 的频率来采样. 显然只要保证(13)式成立, 就能够采用低于 $2f_h$ 的频率来采样.

$$f_h > u_h / \sin\alpha \quad (13)$$

由图3可以得到

$$u_h = u_{1,t} = f_h \frac{\cos(\beta - \alpha_1)}{\sin\beta}, \quad \beta - \alpha_1 < \frac{\pi}{2} \text{ 且 } 0 < \alpha_1, \beta < \pi \quad (14)$$

$$u_h = -u_{2,t} = f_h \frac{\cos(\beta - \alpha_2)}{\sin\beta}, \quad \beta - \alpha_2 > \frac{\pi}{2} \text{ 且 } 0 < \alpha_2, \beta < \pi \quad (15)$$

综合上两式得到

$$u_h = f_h \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta}, \quad 0 < \alpha, \beta < \pi \quad (16)$$

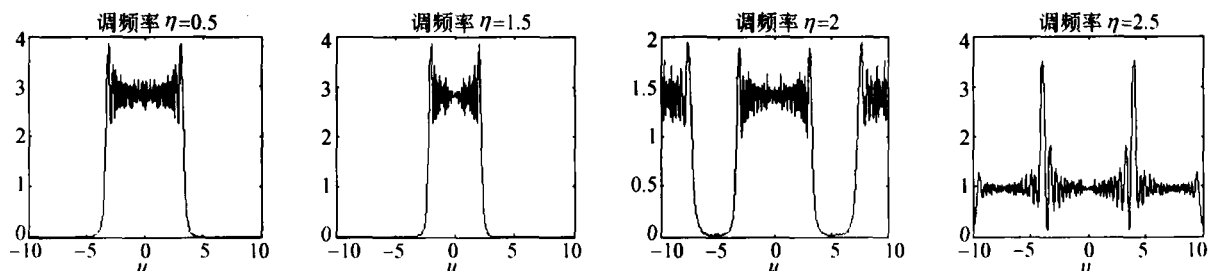


图4 采样信号 $x_s(t)$ 不同调频率下的 $3\pi/4$ 分数阶 Fourier 谱

将之代入(13)式, 则有

$$\cot\alpha \cot\beta < 0, 0 < \alpha, \beta < \pi \quad (17)$$

显然, 只要 α 与 β 不在同一象限即可保证(13)式成立. 由此我们可以知道, 对 chirp 信号是可以低于最高频率 f_h 的两倍进行采样而不造成信号分数阶 Fourier 谱的混叠, 相应的 α 阶分数阶 Fourier 域重构低通滤波的截止频率 Ω_{cut} 取值区间为

$$[2\pi u_h, 2\pi f_s \sin\alpha - 2\pi u_h] \quad (18)$$

尽管图3给出的是调频率小于零的情况, 但是当调频率大于零时, 我们能够得到同样的结论.

接下来设定具体模型进行仿真验证. 设 chirp 信号模型为 $x(t) = e^{j\pi\eta t^2}$, 分数阶 Fourier 域的阶数为 $\alpha = 3\pi/4$, 采样频率 $f_s = 20$ Hz, 采样时间为 $[-10 \text{ s}, 10 \text{ s}]$, 在上述参数的情况下, 根据分数阶 Fourier 域采样定理和(16)式可以知道采样信号 $x_s(t)$ 的 $3\pi/4$ 阶分数阶 Fourier 谱不混叠的临界调频率是 $\eta = 2$, (即解方程 $f_s = 2u_h / \sin\alpha = 2f_h \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta \sin\alpha} = \eta T_d (1 + \cot\alpha / \eta)$). 因此, 图4给出了调频率 η 依次为 0.5, 1.5, 2, 2.5 的 chirp 信号, $x_s(t)$ 的 $3\pi/4$ 分数阶 Fourier 谱. 可以看到, 当调频率为 1.5 时, $x_s(t)$ 的 $3\pi/4$ 分数阶 Fourier 谱仍然与调频率为 0.5 时一样没有发生混叠, 而这时 $x_s(t)$ 的频谱(即, $\pi/2$ 分数阶 Fourier 谱)则已经发生混叠. 在调频率为 2 时, $x_s(t)$ 的 $3\pi/4$ 分数阶 Fourier 谱的零次谐波和 1 次谐波开始接触, 当调频率为 2.5 时, 则已经不能完全地分离开 $3\pi/4$ 分数阶 Fourier 谱的各次谐波了.

现在我们对调频率为 1.5 的采样信号作 $3\pi/4$ 分数阶 Fourier 域的低通滤波来重构原信号。显然, 采样频率 $f_s = 20$ Hz 在 $3\pi/4$ 分数阶 Fourier 域是满足分数阶 Fourier 域采样定理的, 因此选择好合适的低通滤波截止频率 Ω_{cut} 将能够不失真地恢复出原信号。根据(18)式有

$$5\sqrt{2\pi} \leq \Omega_{\text{cut}} \leq 15\sqrt{2\pi} \quad (19)$$

所以确定 $\Omega_{\text{cut}} = 10\sqrt{2\pi}$, 将之代入(10)式, 得到时域重构公式如下:

$$x_{r,3\pi/4}(t) = e^{j\pi t^2} \sum_{n=-200}^{200} x_s\left(\frac{n}{20}\right) e^{-j\pi\left(\frac{n}{20}\right)^2} \cdot \frac{\sin\left[20\pi\left(t - \frac{n}{20}\right)\right]}{20\pi\left(t - \frac{n}{20}\right)} \quad (20)$$

5 结论

分数阶 Fourier 变换是传统 Fourier 变换的广义形式, 分数阶 Fourier 域同时反映了信号在时、频域的信息, 所以分数阶 Fourier 变换可以理解为一种统一的时频变换工具, 其具有的 1 个自由参数能够为信号分析提供更多的选择, 因此, 从 20 世纪 90 年代中后期以来逐渐成为了信号处理领域的研究热点之一。本文利用分数阶 Fourier 变换卷积定理推导出分数阶 Fourier 域带限信号的均匀采样理论。该理论揭示了怎样才能保证 α 阶分数阶 Fourier 域带限信号采样后的 α 阶分数阶 Fourier 谱不混叠, 以及如何重构原信号。由于 $\pi/2$ 分数阶 Fourier 域就是频域, 上述分数阶 Fourier 域采样定理在 $\alpha = \pi/2$ 时就蜕化成传统频域带限信号采样定理。采样定理解决了如何进行时域离散的问题, 而数字信号处理中信号在任何域中都是离散的, 那么分数阶 Fourier 域离散后的分析范围和分辨率又如何确定? 既然我们实际处理的信号都是既时限又带限的, 所以, 不失一般性, 可以假定对连续信号以采样频率 f_s 从 $-T_d/2$ 时刻到 $T_d/2$ 时刻进行均匀采样, 那么相应的时、频域分析范围就是 $[-T_d/2, T_d/2]$, $[-f_s/2, f_s/2]$, 分辨率就是 $1/f_s$, $1/T_d$, 将之拓展到 α 阶分数阶 Fourier 域, 得到相应的 α 阶分数阶 Fourier 域分析范围是 $\left[-\sqrt{\frac{T_d^2}{4}\cos^2\alpha + \frac{f_s^2}{4}\sin^2\alpha}, \sqrt{\frac{T_d^2}{4}\cos^2\alpha + \frac{f_s^2}{4}\sin^2\alpha}\right]$,

离散分辨率是 $\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{f_s^2} + \frac{\sin^2\alpha}{T_d^2}}$ 。接下来考虑到分数阶 Fourier 变换适于处理 chirp 类信号, 且 chirp 类信号是信号处理领域经常遇到的信号之一, 因此, 本文以 chirp 信号为例对分数阶 Fourier 域采样定理的应用作了仿真说明, 得到了 chirp 信号能够以低于两倍频域最高频率采样的前提条件是 $\cot\alpha \cot\beta < 0$ ($0 < \alpha, \beta < \pi$), 其中 α 为分数阶 Fourier 域的阶数, β 为 chirp 信号的 Wigner 分布与时间轴的逆时针夹角, 并给出了信号的频域最高频率 f_h 与 α 阶分数阶 Fourier 域最高频率 u_h 间的关系: $u_h = f_h \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta}$, $0 < \alpha, \beta < \pi$, 仿真结果证明了本文结论的有效性。

参考文献

- 1 Namias V. The fractinal order Fourier transform and its application to quantum mechanics. J Inst Math Appl, 1980, 25: 241-265
- 2 McBride AC, Kerr FH. On Namias' fractional Fourier transform. IMA J Appl Math, 1987, 39: 159-175
- 3 Almeida LB. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(11): 3084-3091
- 4 Ozaktas HM, Arikan O, Kutay MA, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform. IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44(9): 2141-2150
- 5 Tao R, Deng B, Wang Y. Research Progress of the fractional Fourier transform in signal processing. Science in China, Ser F, Information Science, 2006, 49(1): 1-25
- 6 Qi L, Tao R, Zhou SY, et al. Detection and paramter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform. Science in China, Ser F, Information Science, 2004, 47(2): 184-198
- 7 Yetik IS, Nehorai A. Beamforming using the fractional Fourier transform. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 51(6): 1663-1668
- 8 Sun HB, Liu GS, Gu H, et al. Application of the fractional Fourier transform to moving target detection in airborne SAR. IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(4): 1416-1424
- 9 Martone M. A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time-frequency-selective channels. IEEE Trans Communications, 2001, 49(6): 1011-1020
- 10 Djurovic I, Stankovic S, Pitas I. Digital watermarking in the fractional Fourier transformation domain. Journal of Network and Computer Applications, 2001, 24: 167-173
- 11 Hennelly B, Sheridan JT. Fractional Fourier transform-based

- image encryption; Phase retrieval algorithm. *Optics Communications*, 2003, 226: 61—80
- 12 Xia XG. On Bandlimited signals with fractional Fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, 3(3): 72—74
- 13 Zayed AI, Garcia AG. New sampling formulae for the fractional Fourier transform. *Signal Processing*, 1999, 77: 111—114
- 14 Erseghe T, Kraniuskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem. *IEEE Trans Signal Processing*, 1999, 47(12): 3419—3423
- 15 Candan C, Ozaktas HM. Sampling and series expansion theorems for fractional Fourier and other transforms. *Signal Processing*, 2003, 83: 2455—2457
- 16 于凤芹, 姚旭辉, 曹家麟. 分数阶傅立叶变换的若干问题. *江南大学学报(自然科学版)*, 2002, 1(4): 349—353
- 17 Almeida LB. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 1997, 4(1): 15—17
- 18 赵兴浩, 邓兵, 陶然. 分数阶傅立叶变换数值计算中的量纲归一化研究. *北京理工大学学报*, 2005, 25(4): 360—364
- 19 Bultan A. A four-parameter atomic decomposition of chirplets. *IEEE Trans Signal Processing*, 1999, 47(3): 731—745

美国国家科学基金会 2008 财年的预算请求为 64.3 亿美元

2007年2月5日, 美国国家科学基金会(NSF)主任 Arden L. Bement 提出 2008 财年 64.3 亿美元的预算请求, 用于 NSF 推动科学与工程领域的研究与教育前沿进展的资助计划. 这一预算比 2007 财年的 60.2 亿美元预算请求增加了 4.09 亿美元.

2008 年 NSF 的资助重点将定位于加强前沿研究, 致力于推动高风险、高回报研究领域知识前沿的进步, 支持有发展前景的研究新动议, 以增强国家在科学发现和技术创新方面的能力. NSF 强调开展提高计算能力的新的研究, 以迎接 21 世纪科学探索所面临的挑战, 同时也注重极地研究、海洋研究、纳米技术、教育以及国际合作. 预算请求的重点包括以下几个方面.

1. 美国竞争力计划

2006 年美国发布了美国竞争力计划(ACI), 向 NSF 和其他资助物质科学与工程研究的联邦机构承诺, 未来 10 年, 政府对这些机构的投资将增加一倍. 这表明, 国家认识到此类学科在美国经济与社会福利、技术创新、教育水平和国际领导地位等方面, 发挥着十分重要的推动作用. 2008 年度 NSF 预算请求增加 6.8%, 就体现了 ACI 的这一思想.

虽然 ACI 特别强调对数学、物质科学和计算的支持, 但是由于现代科学研究及其基础设施和人力资源的跨学科性质, 使得我们很难明确区分研究本身与技术或人力支撑之间的界限. 因此, NSF 所有的研究和教育计划都将有助于提高美国的竞争力和社会福利. 例如, 自然系统为许多方面的研究提供了极好的例证, 包括有效通讯、复杂计算、高效信号、高适应性自组织, 以及运用微小而复杂的化学和物理网络实现的多模态感应等等. 诸如此类对生物物理系统的研究, 将涉及到物理学与计算机科学家、工程师、生物学家和社会科学家, 所有这些相关学科的科学家都需要具有创造性的研究方法途径, 而这只能在物理、生物、纳米、信息、神经与认知科学的最终融合中才会产生.

2. 国际极地年活动

为迎接 2007 年 3 月开始的国际极地年(IPY)而举办的科学和教育筹备活动, 正在世界范围内进行. 2008 年度 NSF 为开展 IPY 的预算请求是 5900 万美元. IPY 旨在推进关于极地地区如何影响全球气候的研究, 带动许多科学领域的根本性进展, 鼓励年轻人未来成为科学家和工程师的热情. IPY 的许多研究将有助于实现美国“气候变化科学计划”的目标, 包括大气观测、数据分析、建立模型, 以及有助于我们理解和应对全球环境变化的社会科学研究. IPY 的另一个重点是, 研究极地环境下的生命适应与生存, 不仅强调细胞和基因组水平的研究, 而且扩展到人类活动的影响. IPY 的第三个重点是, 维护现有的标准化数据库以及创造新的科学标本, 确保现在和未来都能够得到应用. (下转第 671 页)